

Formuleblad relativiteit (deel 2)

u = snelheid van waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W ;

v = snelheid van een deeltje (of voorwerp)

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot m \cdot \frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48} \cdot m \cdot \frac{v^6}{c^4} + \dots$$

Lorentz- transformatie van W naar W' :	$\begin{cases} p'c = \gamma \cdot (pc - \beta \cdot E) \\ E' = \gamma \cdot (E - \beta \cdot pc) \end{cases}$	Lorentz- transformatie van W' naar W :	$\begin{cases} pc = \gamma \cdot (p'c + \beta \cdot E') \\ E = \gamma \cdot (E' + \beta \cdot p'c) \end{cases}$
--	---	--	---

Hierbij geldt $\beta = \frac{u}{c}$ en $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ waarbij u de snelheid is van W' ten opzichte van W .

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

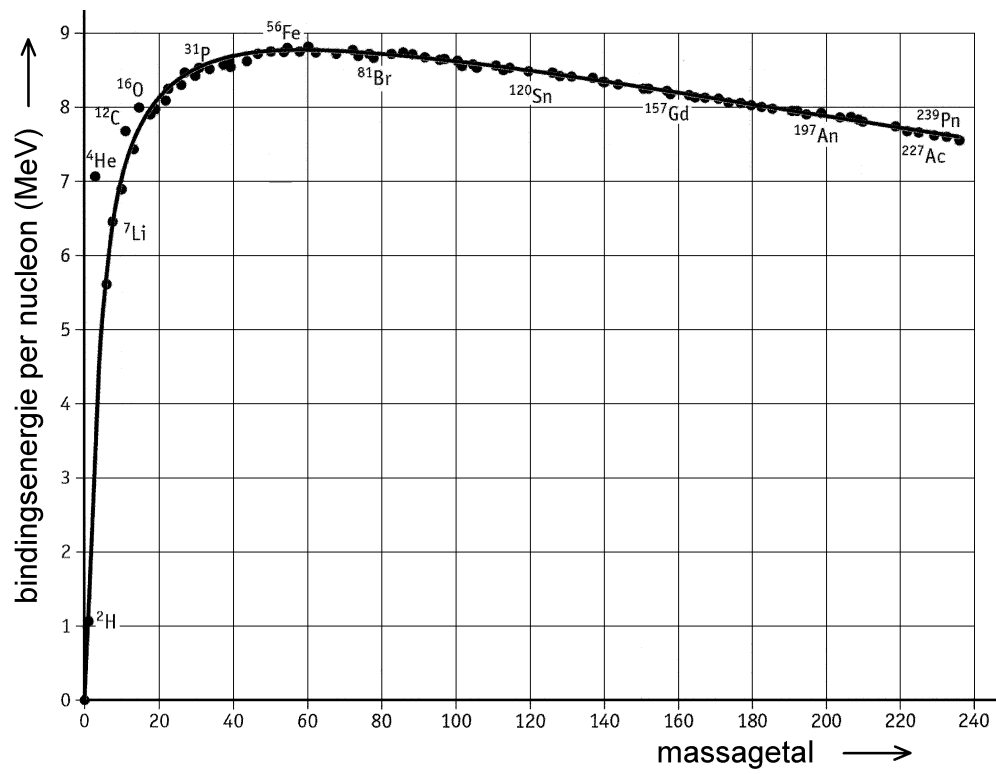
Foton: $E = pc$

$c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s

1 u = $1,6605 \cdot 10^{-27}$ kg

1 eV = $1,6022 \cdot 10^{-19}$ J

1 u $\equiv$ 931,49 MeV

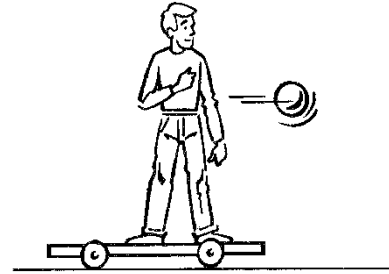


Naam: _____ Klas: _____

Repetitie Relativiteit deel 2 (versie A)

Opgave 1

In de figuur hiernaast staat een man met een massa van 60 kg op een licht lopend karretje met een massa van 15 kg. Hij heeft een kegelbal met een massa van 5,0 kg bij zich. Bereken de snelheid die de man plus karretje krijgt als hij de bal vanuit stilstand weggooit met een horizontaal gerichte snelheid van 3,0 m/s. Beide snelheden zijn gerekend ten opzichte van de grond.

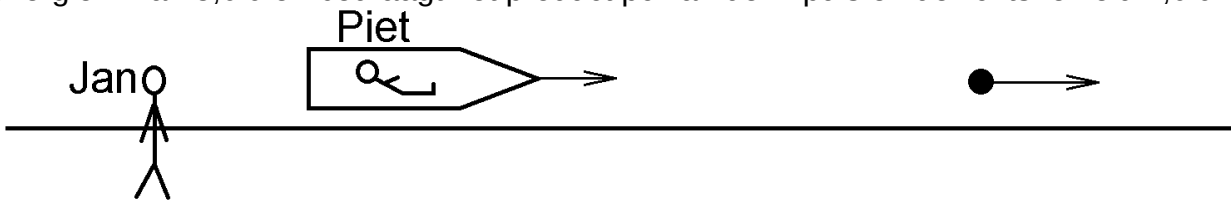


Opgave 2

Een neutron (massa $1,0 \text{ u}$) botst tegen een stilstaande heliumkern (massa $4,0 \text{ u}$) op. De botsing is centraal en veerkrachtig. Voor de botsing is de snelheid van het neutron $10,0 \text{ km/s}$. Bereken de snelheid van het neutron na de botsing. Er hoeft uiteraard geen rekening met relativistische effecten gehouden te worden.

Opgave 3

In de onderstaande figuur staat Jan op de grond en bestudeert hij een deeltje dat met een constante snelheid naar rechts beweegt. Voor Jan heeft het deeltje een totale energie E van 5,0 J en bedraagt het product pc van de impuls en de lichtsnelheid 4,0 J.



- a.
Bereken de waarde van de rustenergie van het deeltje.

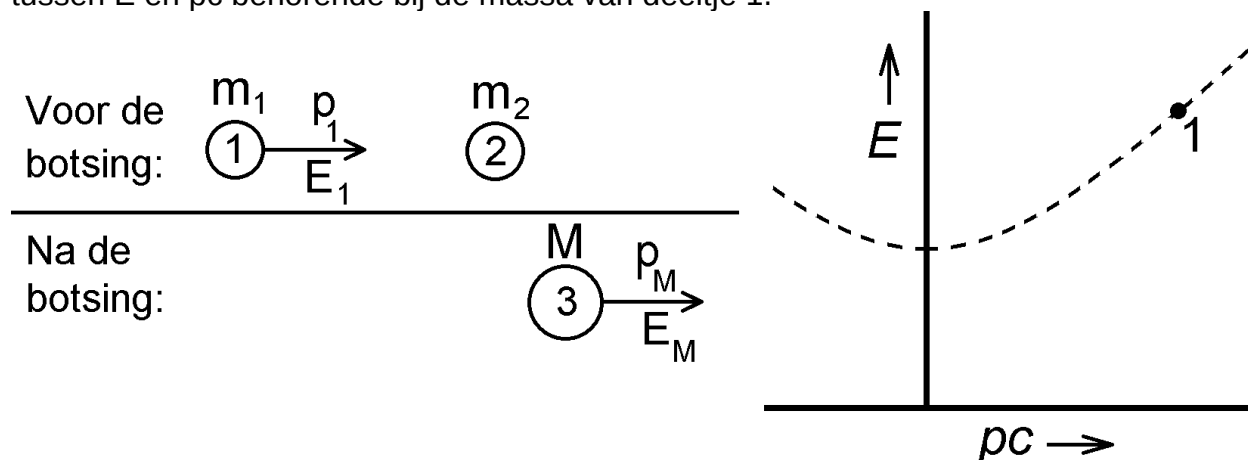
Piet zit in een raket en beweegt ten opzichte van Jan met 70% van de lichtsnelheid.

- b.
Bereken de totale energie van het deeltje vanuit Piets gezichtspunt.

- c.
Bereken welke waarde het product van de impuls en de lichtsnelheid heeft voor Piet.

Opgave 4

In de onderstaande figuur botst deeltje 1 op deeltje 2 dat stilstaat. Na de botsing gaan de deeltjes als één geheel, deeltje 3, verder. Rechts is in het minkowskidiagram deeltje 1 als een stip weergegeven. De stippellijn (orthogonale hyperbool) geeft het verband tussen E en pc behorende bij de massa van deeltje 1.



a.

Stel dat de massa van deeltje 2 precies de helft is van de massa van deeltje 1 (deze aanname wordt niet bij vraag b en verder gedaan). Teken dan deeltje 2 en deeltje 3 als stippen in het minkowskidiagram. Zet de cijfers 2 en 3 bij de stippen.

Deeltje 1 heeft massa m_1 , snelheid v_1 , impuls p_1 en totale energie E_1 . Deeltje 2 heeft massa m_2 . Deeltje 3 heeft massa M , impuls p_M en totale energie E_M .

Voor de massa M van het uiteindelijke deeltje geldt:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

In deze opgave gaan we de bovenstaande formule afleiden.

b.

Schrijf hieronder de twee vergelijkingen op die de wet van behoud van energie en de wet van behoud van impuls weergeven voor het bovenstaande proces. Gebruik naast c uitsluitend de symbolen in de linker figuur.

Wet van behoud van energie:

Wet van behoud van impuls:

Uit de wet van behoud van energie volgt na kwadrateren de volgende vergelijking (vergelijking A).

$$E_1^2 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 = E_M^2$$

Uit deze vergelijking en uit de wet van behoud van impuls volgt de volgende vergelijking (vergelijking B).

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 = M^2 c^4$$

c.

Toon aan dat uit vergelijking A vergelijking B volgt.

Werk hierbij in het onderstaande schema van boven naar beneden. Schrijf alle (ook de kleine) stappen op. Gebruik naast c uitsluitend de bovengenoemde symbolen.

..... =

..... =

..... =

..... =

d.

Bewijs dat uit de vergelijking B de formule voor M^2 (zie het begin van deze opgave) volgt. Schrijf elk stapje van je bewijs op en werk hierbij van boven naar beneden.

..... =

..... =

..... =

..... =

e.

Toon aan dat de formule voor M^2 (zie het begin van deze opgave) voor kleine snelheden overgaat in:

$$M = m_1 + m_2.$$

..... =

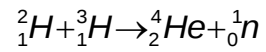
..... =

..... =

..... =

Opgave 5

Een veelbelovende kernfusiereactie bij het opwekken van energie is de volgende.



Hierbij geldt:

$m(\text{H-2-kern}) = 2,013553 \text{ u}$ en $m(\text{H-3-kern}) = 3,015500 \text{ u}$ en

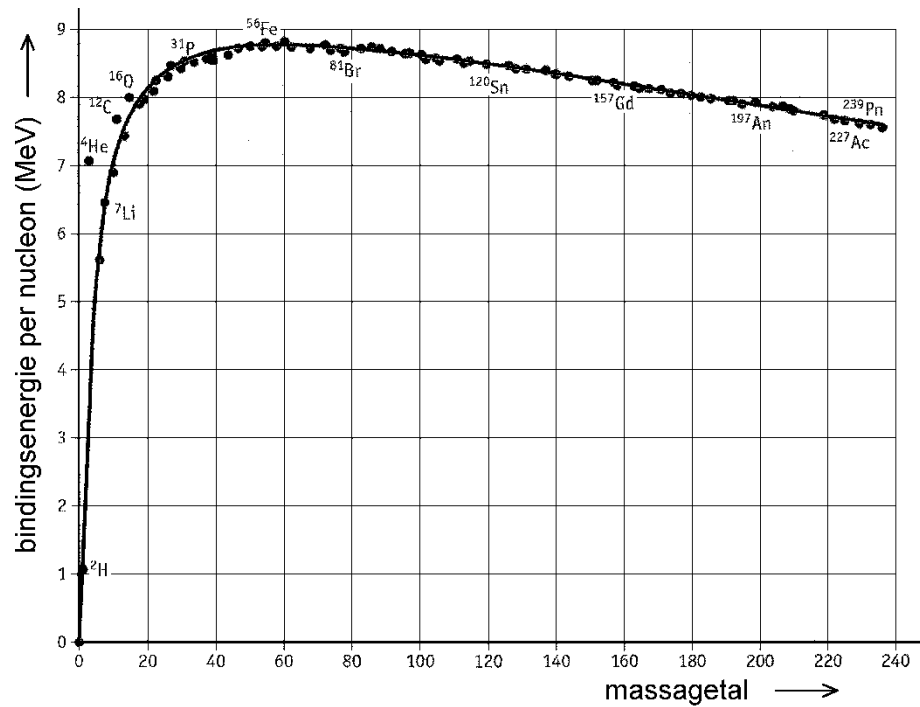
$m(\text{He-4-kern}) = 4,001506 \text{ u}$ en $m(\text{neutron}) = 1,008665 \text{ u}$.

Bereken hoeveel MeV bij deze reactie vrijkomt.

Opgave 6

Stel je de volgende niet reële situatie voor. Iemand laat in een eigen kernfusiereactor 2,0 kg helium-4 fuseren tot zuurstof-16.

Bereken dan hoeveel joule hierbij vrijkomt. Maak daarbij gebruik van het diagram hiernaast.



Uitwerkingen

Opgave 1

Na de worp geldt voor de impuls van de bal:

$$p_{BAL} = m \cdot v = 5,0 \cdot 3,0 = 15 \text{ kgm/s}$$

Na de worp geldt voor de impuls van man plus kar:

$$p_{MAN+KAR} = m_{MAN+KAR} \cdot v = (60 + 15) \cdot v_{MAN+KAR}$$

De totale impuls is nul. Voor de snelheid van de man plus kar geldt dan:

$$v_{MAN+KAR} = \frac{15}{60 + 15} = 0,20 \text{ m/s (het minteken is weggelaten)}$$

Opgave 2

Stel dat de botsing onelastisch zou zijn. De gezamenlijke eindsnelheid zou dan zijn:

$$v_{ONELASTISCH} = \frac{P_{VOOR}}{m_{TOTAAL}} = \frac{10,0 \cdot 10^3 \text{ u} \cdot \text{m/s}}{5,0 \text{ u}} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Tijdens de eerste fase van de botsing gaat de neutronsnelheid dus van 10,0 km/s naar 2,0 km/s. Dit is een daling van 8,0 km/s. Tijdens de tweede fase van de botsing daalt de snelheid dus weer met 8,0 km/s. De eindsnelheid wordt dan $2,0 - 8,0 = -6,0 \text{ km/s}$.

Opgave 3

a.

$$\text{Er geldt: } m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2 = 5,0^2 - 4,0^2 = 9,0.$$

$$\text{Dus geldt: } mc^2 = \sqrt{9,0} = 3,0 \text{ J.}$$

b.

$$\beta = \frac{u}{c} = 0,70 \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,70^2}} = 1,4$$

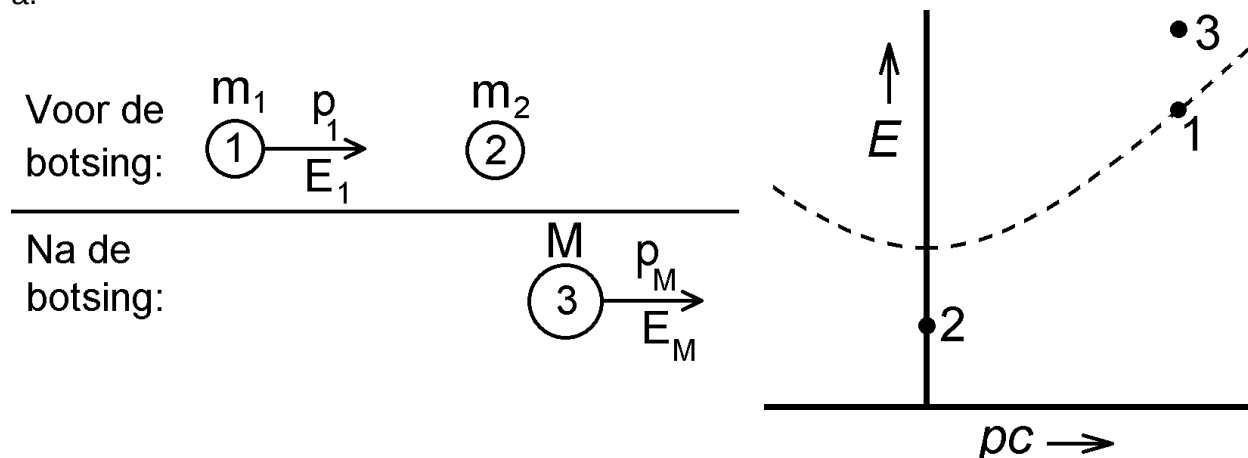
$$E' = \gamma \cdot (E - \beta \cdot pc) = 1,4 \cdot (5,0 - 0,70 \cdot 4,0) = 3,1 \text{ J}$$

c.

$$pc' = \gamma \cdot (pc - \beta \cdot E) = 1,4 \cdot (4,0 - 0,70 \cdot 5,0) = 0,70 \text{ J}$$

Opgave 4

a.



b.

Wet van behoud van energie:

$$E_1 + m_2 c^2 = E_M$$

Wet van behoud van impuls:

$$p_1 = p_M$$

c.

Omdat $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ wordt vergelijking A:

$$p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 = p_M^2 c^2 + M^2 c^4$$

Twee termen vallen tegen elkaar weg vanwege de wet van behoud van impuls:

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 = M^2 c^4$$

d.

Alle termen delen door c^4 geeft:

$$m_1^2 + m_2^2 + \frac{2E_1 m_2}{c^2} = M^2$$

Er geldt:

$$E_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hiermee krijgen we:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

e.

Als v_1 erg klein is, kunnen we de wortel weglaten en krijgen we:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2$$

Hieruit volgt:

$$M^2 = (m_1 + m_2)^2$$

Hieruit volgt:

$$M = m_1 + m_2$$

Opgave 5

$$\Delta m = m(\text{H-2-kern}) + m(\text{H-3-kern}) - m(\text{He-4-kern}) - m(\text{neutron})$$

$$\Delta m = 2,013553 + 3,015500 - 4,001506 - 1,008665 = 0,01888 \text{ u}$$

$$E = 0,01888 \text{ u} \times 931,49 \text{ MeV/u} = 17,6 \text{ MeV}$$

Opgave 6

Per nucleon komt vrij: $8,0 - 7,1 = 0,9 \text{ MeV}$.

$$n(\text{nuc}) = \frac{2,0 \text{ kg}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 1,2 \cdot 10^{27}$$

$$E = 1,2 \cdot 10^{27} \cdot 0,9 \text{ MeV} \cdot 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV} = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ J}$$